



**پاسخ  
پرسش‌های  
پیکار جو!**

۱. می‌توان نوشت:  $(ab+cd)-(ac+bd)=0 \Rightarrow a(b-c)-d(b-c)=0$

$\Rightarrow (a-d)(b-c)=0 \Rightarrow a=d$  یا  $b=c$

با فرض:  $a=d$  و  $b \neq c$  خواهیم داشت:  $ab+ac=a^2+bc=-1$  و در نتیجه:  $a(b+c)=-1$  که از آنجا برمی‌آید:  $a=\pm 1$  و  $b+c=\mp 1$ . با جای‌گذاری در رابطه دیگر نتیجه می‌شود:  $(a=1, bc=-2)$  یا  $(a=-1, bc=2)$

و از آنجا چهار دسته جواب به صورت‌های زیر به‌دست می‌آید:

$(a,b,c,d)=(1,1,-2,1), (1,-2,1,1), (-1,1,-2,-1), (-1,-1,2,-1)$

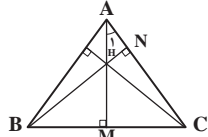
همچنین، با فرض  $b=c$  و  $a \neq d$  نیز چهار دسته جواب به‌دست می‌آید، اما با فرض  $b=c$  و  $a=d$  هیچ جوابی به‌دست نمی‌آید. (چرا؟) پس در مجموع هشت دسته جواب داریم (گزینه د).

۲. ابتدا لم  $BH=2R \cos B$  را اثبات کنید (راهنمایی):

$BH=BN-NH=AB \cdot \sin A - AN \tan A$

$=AB \cdot \sin A - AB \cdot \cos A \cdot \cot C = AB(\sin A - \cos A \cdot \cot C)$

$= AB \left( \frac{\sin A \cdot \sin C - \cos A \cos C}{\sin C} \right) = \frac{-AB \cos(A+C)}{\sin C} = \dots$



به‌همین ترتیب می‌توانید ثابت کنید:  $CH=2R \cos C$  و  $AH=2R \cos A$   
دایره محیطی مثلث است. حال به راحتی می‌توان نوشت:

$BH^2 + AC^2 = 2BC^2$

$\Rightarrow (2R \cos B)^2 + (2R \sin B)^2 = 2(2R \sin A)^2$

$\Rightarrow \cos^2 B + \sin^2 B = 2 \sin^2 A$

$\Rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}, \hat{A} = 45^\circ$  (گزینه الف)

۳. می‌توان نوشت:  $4^x + 4^{x+1} + 4^{x+2} + \dots + 4^{2x-1} + 4^{2x} = 4^x(1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^{2x-1})$

$= 4^x(1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^{2x-1})$

$= 4^x(1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^{2x-1})$

۲۱۲۰۸ مربع کامل است، لذا کافی است عبارت داخل پرانتز هم مربع کامل باشد. توجه به اتحاد  $(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$ ، به این منظور کافی است داشته باشیم:  $2x \times 791 = 2x \times 791 + 1$  و در نتیجه:  $x = 1395$  (گزینه ج) و می‌توان ثابت کرد که این بزرگ‌ترین مقدار  $x$  است (خودتان اثبات کنید).

۴. با توجه به فرض مسئله داریم:

$S \leq x, S \leq \frac{1}{y}, S \leq y + \frac{1}{x}$

حال می‌توان نوشت:

$\frac{1}{y} \geq S \geq y + \frac{1}{x} \Rightarrow S \leq y + \frac{1}{x} \leq \frac{y}{S} \Rightarrow \frac{y}{S} \geq S$

$x \geq S \Rightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{1}{S}$

$\Rightarrow S^2 \leq 2 \Rightarrow S \leq \sqrt{2}$  (گزینه د)

۵. به ازای  $P=2$ ,  $P^{P+1} + 2 = 10$ ,  $P=2$  عددی اول نیست، پس  $P$  فرد است. به ازای

$P=3$ ,  $P^{P+1} + 2 = 83$  عددی اول است. حال اگر عدد اول دیگری هم باشد، باید در تقسیم

بر ۳ باقی مانده داشته باشد، لذا  $P \equiv (\pm 1) \pmod{3}$  و در نتیجه:  $P^{P+1} + 2 \equiv 0 \pmod{3}$  که نمی‌تواند

عددی اول باشد. بنابراین فقط به ازای  $P=3$  حاصل عددی اول است (گزینه الف).



**پاسخ  
معماهای ایستگاه اندیشه  
و ادب ریاضی**

**ایستگاه اول**

عدهای ستون  $n$ ام با توان‌های  $2^{n-1}$  تنظیم شده‌اند. ستون اول، ستون ۱، ستون دوم، ستون ۲، ستون سوم ستون ۴، ستون چهارم ستون ۸ و... هستند. عددهای هر ستون با  $2^{n-1}$  شروع می‌شوند و متوالیاً تا  $2^n-1$  پیش می‌روند. مثلاً ستون چهارم، با عدد ۸ شروع شده است و بعد عددهای ۹، ۱۰، ۱۱ و... و ۱۵ آمده‌اند. در ادامه  $2^{n-1}+1$  واحد به آن اضافه می‌شود و همین نظم ادامه می‌یابد. مثلاً در همان ستون چهارم بعد از ۱۵، ۱۶ یعنی ۲۴ آمده و باز هم متوالیاً تا  $2^n-1$  (یعنی ۳۱) ادامه یافته است و به همین ترتیب. بنابراین ستون ششم (ستون ۳۲ تا ۳۷) شروع شده است و باید تا ۶۳ ادامه یابد و بعد عدد  $63+32=95$  یعنی ۹۶ بیاید و بعد متوالیاً تا عدد ۱۲۷ و... به این ترتیب ستون هفتم با ۶۴ شروع شده است و متوالیاً تا ۱۲۷ ادامه یافته و اما چرا این جدول درست کار می‌کند؟ در واقع رمز این کار در تبدیل این عددها به مبنای دو است. مثلاً عدد ۴۵ در مبنای دو برابر است با:  $101101$  یعنی عدد ۴۵ فقط در ستون‌های ۸، ۳۲، ۴ و ۱ ظاهر می‌شود (که همین‌طور است) و داریم:  $45=32+8+4+1$

**ایستگاه دوم**

**معمای اول -** من از او پرسیدم: «آیا تو کیوان هستی؟» اگر کسی که او را دیدم، کاوه بوده باشد، پاسخ او بله بود (چون دروغ می‌گفت) و اگر او کیوان بود، پاسخش خیر بود. (چرا؟) اگر هم بابک بود، باز هم پاسخ خیر می‌داد. (چرا؟) به این ترتیب با توجه به پاسخ او فوری می‌فهمیدم که او کاوه است یا خیر. اگر او به این سؤال پاسخ بله می‌داد، کاوه بود و اگر پاسخ خیر می‌داد، کیوان یا بابک بود.

**معمای دوم -** از او پرسیدم: «آیا تو بهرام هستی؟» دلیل درستی کار کرد این سؤال را توضیح دهید. **معمای سوم -** یک پرسش مناسب این است: «آیا شهریار راست‌گوست؟» اگر او شهریار باشد و راست‌گو، در پاسخ می‌گوید: «بله» و اگر شهریار باشد و دروغ‌گو، باز هم می‌گوید: «بله». (چرا؟) اگر هم برادر دیگر باشد، در هر حال می‌گوید: «خیر». (چرا؟) بنابراین اگر او پاسخ بله می‌داد، می‌فهمیدم شهریار است و اگر خیر می‌گفت، می‌فهمیدم برادر دیگر است.

**معمای چهارم -** کافی بود پرسیم: «آیا تو شهریار هستی؟» اگر پاسخ بله بود، نتیجه می‌گرفتم شهریار راست‌گوست و اگر پاسخ خیر بود، می‌فهمیدم شهریار دروغ‌گوست. (دلیل را توضیح دهید.)

**معمای پنجم -** خیلی ساده، کافی بود یک سؤال ساده دلخواه از یکی از آن‌ها بپرسم؛ مثلاً: «آیا آب مایع است؟»

**معمای ششم -** از یکی از آن‌ها پرسیدم: «آیا تو راست‌گو هستی؟» او گفت: بله. (چرا مطمئن بودم که در هر حال پاسخ بله می‌گیرم؟)

**پاسخ‌های تفریح اندیشه**

۱. جواب:  $11/76$ . جملات به ترتیب در ۱ و ۲ و ۳ و ۴ ضرب می‌شوند.

۲. جواب: عددهای روی خطوط موازی قطر اصلی را با هم جمع کنید. دنباله اعداد متوالی ۴ و ۵ و ... و ۱۰ به‌دست می‌آید:  $4+2+3+1+3+2+1+2+2+3+1+3+4+5+10$

۳. جواب: ۱. فقط باید فضاهای خالی را جابه‌جا کرد! این‌ها ۵ عدد فرد متوالی‌اند:  $13 \ 15 \ 17 \ 19 \ 21$

۴. جواب: سه‌شنبه.

۵. جواب: ۳۶ و ۲۴ سال

۶. جواب: هیچ‌وقت این دو بر هم منطبق نمی‌شوند!

۷. جواب:  $62/5$  درصد.